

【公務人員升等考 106】其他假設不變，請問：

(一)何謂套利？(9 分)

(二)現貨、買權、與賣權三者的關係為何？(8 分)

(三)如果現貨價跌致市場出現上述關係不成立的現象，應如何套利？(8 分)

【答】

(一)參考第一章，有獲利、無風險、無自有資金。

(二)現貨是買權及賣權的標的物，當現貨價格上漲時，買權價格隨之上漲，當現貨下跌時，賣權價格隨之下跌，若以公式表達則可以買賣權平價公式說明：

$$C = P + S - Ke^{-rt}$$

(三)

以買賣權平價公式進行套利

若出現

$$C > P + S - Ke^{-rt}$$

則可以買進賣權及標的股票，同時賣出買權，必須注意的該買權及賣權有相同的標的物及到期期間。

若出現

$$C < P + S - Ke^{-rt}$$

則可以買進買權，同時賣出賣權及放空標的股票。

十、選擇權評價理論 2—二項式訂價理論

股價單期上漲至 P_u 的機率為 p ，下跌至 P_d 的機率為 $(1-p)$ ，並假設投資人具有風險中立性，若單期的無風險利率為 R_f ，則可透過下式求得上漲機率 p 。

$$P_0 \times (1 + R_f) = P_u \times p + P_d \times (1 - p)$$

【推導過程詳述】

假設股價上漲至 uS 之機率為 P_u ，股價下跌至 dS 之機率為 $(1-P_u)$ ，在風險中立下，資產現值為 1 期後期望值的折現值，期望值為各種可能價格乘以相對應的機率，因此可得下式：

$$S = \frac{P_u S + (1 - P_u) dS}{1 + R_f}$$

$$\text{經移項整理可得 } P_u = \frac{SR_f - dS}{uS - dS} = \frac{R - d}{u - d}$$

若股價上漲至 uS ， $C_u = \text{Max}(uS - K, 0)$ ，其發生機率亦為 P_u ；

若股價下跌至 dS ， $C_d = \text{Max}(dS - K, 0)$ ，其發生機率亦為 $1 - P_u$ ；

因此在風險中立無套利機會的情形下， C 的當期現值亦為未來期望值的折現值，因此可得下式：

$$C = \frac{1}{1+R_f} (P_u C_u + (1-P_u) C_d), \text{ 其中機率 } P_u = \frac{R_f - d}{u - d} \text{ 已由上述過程中導出。}$$

請利用二項式定理說明避險比率。

【答】

假設股價(S)經過 1 期上漲 u 倍或下跌 d 倍：

$$S \begin{cases} uS \\ dS \end{cases}$$

因此買權價值 C，經過 1 期不是 C_u 就是 C_d ：

$$C \begin{cases} \text{Max}(uS-K,0) = C_u \\ \text{Max}(dS-K,0) = C_d \end{cases}$$

假設投資組合 $V_0 = mS - C$

因此，經過 1 期後 V_1 有兩種可能的價值：

$$V_1 \begin{cases} mxuS - C_u \\ mxdS - C_d \end{cases}$$

在風險中立的假設下， V_1 的兩種可能皆相同，即 $mxuS - C_u = mxdS - C_d$

$$\text{求得： } m = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}$$

【避險比率】若一投資人打算以持有一股股票(該公司股票價格為\$70)和賣出某些股數買權(執行價格\$65)達到完全避險投資組合。

(1) 若一年後該股票之價格各有 50% 機率為\$60 或\$85 欲達到完全避險投資組合，試問該投資人該賣出多少股買權才能達到該目的？

(2) 若風險中立，且一年後該股票之價格不是\$60 就是\$85 無風險利率為 5%，則該買權之合理價格為何？

【答】

(1) 1.25

$$S=70 \begin{cases} 85 (50\%) \\ 60 (50\%) \end{cases} \quad C(K=65) \begin{cases} 20 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \Delta C / \Delta S = (20 - 0) / (85 - 60) = 0.8$$

完全避險，即為投資組合的 $\Delta = 1 \times 1 + \boxed{?} \times 0.8 = 0$

$$\downarrow$$

$$-1.25 \rightarrow \text{Sell } 1.25 \text{ 口買權。}$$

(2) 10.29

$$S=70 \begin{cases} 85 (p) \\ 60 (1-p) \end{cases}$$

$$C(K=65) \begin{cases} 20 \\ 0 \end{cases}$$

$$70 \times 1.05 = 85 \times p + 60 \times (1-p)$$

$$C = [20 \times 0.54] / 1.05 = 10.29$$

$$P = 0.54$$

【單期買權】 假設第 t 期時股票價格 \$100，而股價在 $t+1$ 期時可能上漲為目前的 1.2 倍成為 \$120 或下跌為目前的 0.7 倍成為 \$70 (即 $u=1.2$ 、 $d=0.7$)，買權的執行價格為 105，且於 $t+1$ 期到期，無風險利率為 10%，試求此買權價格為何？

【答】 買權價格 = \$10.91

$$T_0 \quad T_1$$

$$S=100 \begin{cases} 120 (Pu) \\ 70 (1-Pu) \end{cases}$$

$$T_0 \quad T_1$$

$$C(K=105)=? \begin{cases} 15 \\ 0 \end{cases}$$

Step 1：先求 $Pu=0.8$

Step 2：再求買權價值

$$C = (15 \times 0.8 + 0 \times 0.2) / 1.1 = 10.91$$

【單期賣權】 假設第 t 期時股票價格 \$100，而股價在 $t+1$ 期時可能上漲為目前的 1.2 倍成為 \$120 或下跌為目前的 0.7 倍成為 \$70 (即 $u=1.2$ 、 $d=0.7$)，賣權的執行價格為 105，且於 $t+1$ 期到期，無風險利率為 10%，試求此賣權價格為何？

【答】 賣權價格 = \$6.36

$$T_0 \quad T_1$$

$$S=100 \begin{cases} 120 (Pu) \\ 70 (1-Pu) \end{cases}$$

$$T_0 \quad T_1$$

$$P(K=105)=? \begin{cases} 0 \\ 35 \end{cases}$$

$$Put = (0 \times 0.8 + 35 \times 0.2) / 1.1 = 6.36$$

思考：亦可由上題求出的 Call 代入 Put-call Parity 後，可得到 Put 的價值。

TM 公司正執行一計畫，若成功，1 年後公司價值 650 元；若失敗 1 年後公司價值 250 元，公司目前市值 400 元，其有 1 年後到期之負債 300 元，國庫券利率 5%，試求以下各子題：

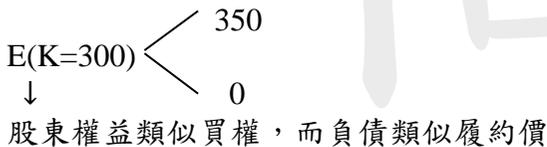
- (1) 風險中立機率。 (2) 公司股東權益價值。
 (3) 公司負債價值。 (4) 寫出買賣權平價理論，並驗證該公式之正確性

【答】

(1) $P_u=0.425$

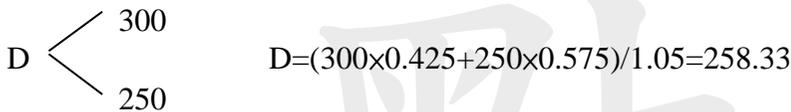
$$400 \times 1.05 = 650 \times P_u + 250 \times (1 - P_u)$$

(2) $E=141.67$



$$E = (350 \times 0.425 + 0 \times 0.575) / 1.05 = 141.67$$

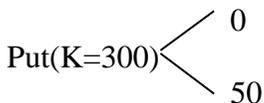
(3) $Debt=258.33$



(4) $Call(K=300)=141.67$

$Put(K=300)=27.38$

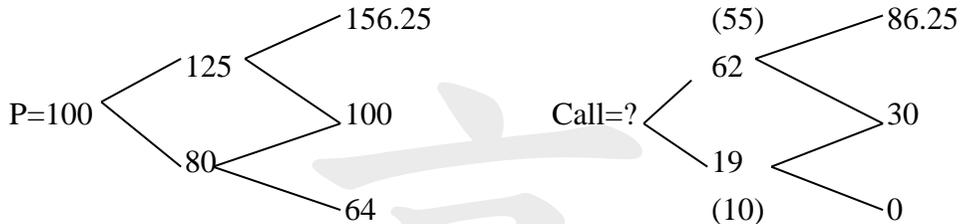
Put-Call Parity : $400 + 27.38 - 141.67 = \frac{300}{1.05}$



$$(50 \times 0.575) / 1.05 = 27.38$$

【美式多期未發放現金股利】大昌公司有一個二年期的美式買權，履約價格為\$70，無風險年利率為12%，目前股價\$100，該公司預期未來二期，每期股價不是上漲25%就是下跌20%，試求算其買權價值？

【答】 $P_u=0.71$ ， $Call=44.48$



Step 1：求 P_u

$$100 \times 1.12 = P_u \times 125 + (1 - P_u) \times 80, P_u = 0.71$$

Step 2：於第1期期底時的判斷是否應該提早履約

- (1) 若第1期期底股價為125元，買權提早履約的價值= $\$125 - \$70 = \$55$ ，若是不提早履約，則將第2期期底的買權價值折現至第1期期底
 $= (86.25 \times 0.71 + 30 \times 0.28) / 1.12 = \62.4 ，顯然 $\$62.4 > \55 ，所以選擇不提早履約。
- (2) 若第1期期底股價為80元，買權提早履約的價值= $\$80 - \$70 = \$10$ ，若是不提早履約，則將第2期期底的買權價值折現至第1期期底
 $= (30 \times 0.71 + 0 \times 0.28) / 1.12 = \19.02 ，顯然 $\$19.02 > \10 ，所以仍選擇不提早履約。

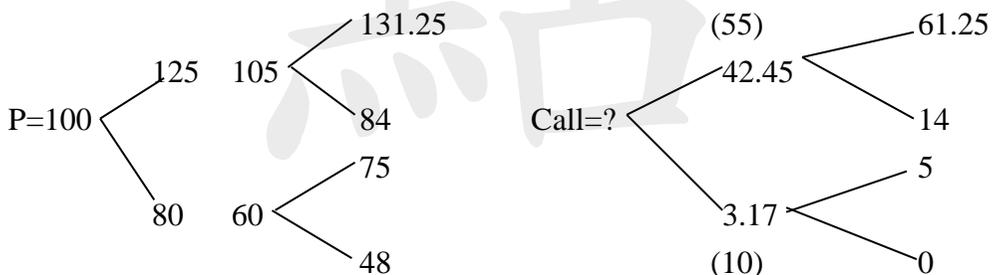
Step 3：求算期初買權價值

$$Call = (\$62.4 \times 0.71 + \$19.02 \times 0.29) / 1.12 = 44.48$$

結論：美式無現金股利之買權：可以提早履約，但不會提早履約(假設股權不因除息而調整)

【美式多期發放現金股利】大昌公司有一個二年期的美式買權，履約價格為\$70，無風險年利率為12%，目前股價\$100，該公司預期未來二期，每期股價不是上漲25%就是下跌20%，該公司將會於第1年底發放每股\$20現金股利，試求算其買權價值？

【答】 $P=0.71$ ，股價及買權樹狀圖如下：



第2期底履約並折現至第1期底之價值買權分別為42.45及3.17；另若持有者在第1期底股利發放前(因股價較高)履約買權，履約價值分別為\$55及